

УДК 519.2

## АРТЕФАКТЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ИХ УСТРАНЕНИЕ

© Ю. Е. Воскобойников

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113*

*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20*

*E-mail: voscob@mail.ru*

Алгоритмы вейвлет-фильтрации широко используются для обработки изображений, и большинство из них носит пороговый характер: коэффициент вейвлет-разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае коэффициент подвергается некоторому (чаще всего нелинейному) преобразованию, которое задаётся используемой пороговой функцией. При фильтрации контрастных изображений такая обработка коэффициентов разложения может привести к появлению в отфильтрованном изображении так называемых артефактов — в окрестности скачкообразного изменения амплитуды фильтруемого изображения появляются импульсы, отсутствующие в исходном изображении, что существенно ухудшает качество фильтрации. Для устранения таких артефактов в работе рассматривается несколько подходов и предлагается метод, который заключается в постобработке результата вейвлет-фильтрации изображений нелинейными алгоритмами пространственной фильтрации. Выполненный вычислительный эксперимент позволил сделать вывод, что предлагаемый метод является эффективным способом устранения артефактов вейвлет-фильтрации контрастных изображений.

*Ключевые слова:* вейвлет-фильтрация изображений, пороговые функции, артефакты вейвлет-фильтрации, способы устранения артефактов, нелинейные алгоритмы пространственной фильтрации.

DOI: 10.15372/AUT20200601

**Введение.** В последние три десятилетия для фильтрации изображений часто используются алгоритмы, основанные на представлении зашумлённого изображения в базисе вейвлет-функций [1, 2]. Такие алгоритмы, как правило, включают три этапа:

- выполнение прямого дискретного вейвлет-преобразования (нахождение коэффициентов разложения по зашумлённым значениям изображения);
- обработку «зашумлённых» коэффициентов разложения;
- вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования от обработанных коэффициентов разложения (нахождение значений «отфильтрованного» изображения).

Совокупность этих трёх этапов называют вейвлет-фильтрацией. Качество фильтрации (т. е. ошибка фильтрации) во многом определяется алгоритмами обработки, используемыми на втором этапе. Наиболее часто в качестве таких алгоритмов обработки выступают пороговые алгоритмы [2, 3]: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае такой коэффициент сохраняется или подвергается некоторому (в общем случае нелинейному) преобразованию, определяемому используемой пороговой функцией. Такая пороговая обработка коэффициентов разложения зашумлённого контрастного изображения может привести к появлению в отфильтрованном изображении так называемых артефактов, т. е. новых составляющих (в большинстве случаев это осцилляции), которых не было в «точном» изображении. Очевидно, что наличие таких артефактов значительно ухудшает как качественные, так и количественные показатели вейвлет-фильтрации.

Поэтому целью данной работы является создание эффективного метода, позволяющего значительно уменьшить уровень артефактов вейвлет-фильтрации контрастных изображений.

### Пороговые алгоритмы и артефакты вейвлет-фильтрации изображений.

Кратко приведём основные понятия и определения, необходимые для изложения результатов работы [2–4].

Любое изображение можно интерпретировать как функцию двух переменных  $f(x, y)$ . Определим базисные функции для вейвлет-разложения такой функции. Традиционно в литературе по вейвлет-преобразованиям масштабируемая функция (отцовский вейвлет) обозначается как  $\varphi(x)$ , а  $\psi(x)$  — вейвлет (материнский вейвлет). С использованием операций масштабирования и сдвига из этих функций формируются ортонормированные базисные функции  $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ ,  $\{\psi_{j,n}(x)\}$  в пространстве функций одной переменной  $f(x)$ . Тензорное произведение функций  $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ ,  $\{\psi_{j,n}(x)\}$  порождает следующие ортонормированные базисные функции для разложения функций двух переменных:

$$\{\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y) = \varphi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)\}, \quad \{\varphi\psi_{j,n,m}(x, y) = \varphi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\},$$

$$\{\psi\varphi_{j,n,m}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)\}, \quad \{\psi\psi_{j,n,m}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\psi_{j,m}(y)\}.$$

Соответствующие коэффициенты разложения принято называть:

— аппроксимирующие коэффициенты  $A_j = \{aa_{j,n,m}\}$ , полученные как коэффициенты разложения по базису  $\{\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y)\}$ ;

— горизонтальные детализирующие коэффициенты  $H_j = \{ad_{j,n,m}\}$ , полученные как коэффициенты разложения по базису  $\{\varphi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$ ;

— вертикальные детализирующие коэффициенты  $V_j = \{da_{j,n,m}\}$ , полученные как коэффициенты разложения по базису  $\{\psi\varphi_{j,n,m}(x, y)\}$ ;

— диагональные детализирующие коэффициенты  $D_j = \{dd_{j,n,m}\}$ , полученные как коэффициенты разложения по базису  $\{\psi\psi_{j,n,m}(x, y)\}$ .

На практике изображение задаётся матрицей  $F$  (нулевой (начальный) уровень разложения  $j_0$ ). На первом уровне разложения (номер  $j_0 + 1$ ) вычисляются аппроксимирующие коэффициенты  $A_1 = \{aa_{j_0+1,n,m}\}$ , детализирующие коэффициенты  $H_1 = \{ad_{j_0+1,n,m}\}$ ,  $V_1 = \{da_{j_0+1,n,m}\}$ ,  $D_1 = \{dd_{j_0+1,n,m}\}$ ,  $D_1 = \{dd_{j_0+1,k,n}\}$ . На втором уровне разложения (номер  $j_0 + 2$ ) аналогичной обработке подвергается матрица коэффициентов  $A_1 \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2)$ . Обобщая, приходим к следующей схеме разложения:

$$F \rightarrow (A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2, A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow \dots$$

Отметим закономерность изменения размеров двумерных массивов коэффициентов разложения, а именно: на каждом уровне разложения размеры массивов новых коэффициентов уменьшаются в два раза по сравнению с предыдущими массивами. При этом сумма размеров всех массивов коэффициентов равна размеру исходной матрицы  $F$ , что говорит о сохранении объёма информации, содержащейся в  $F$ .

Показано [2, 3], что при разложении зашумлённого изображения ошибки вычисления детализирующих коэффициентов на 2 порядка и более выше по сравнению с аппроксимирующими коэффициентами. Поэтому на втором этапе вейвлет-фильтрации обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты. Для удобства дальнейшей записи алгоритмов обработки любой из детализирующих коэффициентов будем обозначать как  $\tilde{d}_{n,m}$ , где индексы  $n, m$  определяют номер строки и столбца соответствующей матрицы коэффициентов разложения (номер уровня разложения  $j$  при этом опускается).

Как уже отмечалось, ошибка фильтрации зависит от пороговой обработки коэффициентов разложения и соответственно зависит от используемой пороговой функции. Поэтому

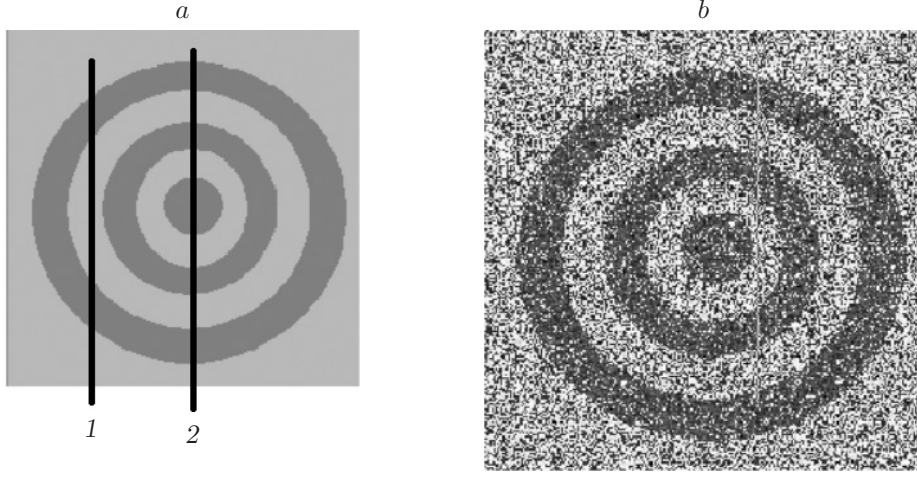


Рис. 1. Тестовое изображение TARGET: *a* — точное; *b* — зашумлённое

первым шагом в уменьшении ошибки фильтрации (а следовательно, и уровня артефактов) является отбор наилучшей пороговой функции, имеющей наименьшую среднеквадратическую ошибку вейвлет-фильтрации. В [5] было показано, что наилучшей в классе однопараметрических пороговых функций является функция, определяемая выражением

$$T_G(\tilde{d}_{n,m}, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}_{n,m}| \leq \lambda; \\ \tilde{d}_{n,m} - \lambda^2/\tilde{d}_{n,m}, & \text{если } |\tilde{d}_{n,m}| > \lambda, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda$  — параметр, называемый пороговой величиной. Среди двухпараметрических пороговых функций наилучшей является функция [6]

$$T_{HEB}(\tilde{d}_{n,m}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}_{n,m}| \leq \lambda_1; \\ \tilde{d}_{n,m}, & \text{если } |\tilde{d}_{n,m}| > \lambda_2; \\ \frac{\tilde{d}_{n,m}}{e-1} \left[ \exp\left(\frac{|\tilde{d}_{n,m}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) - 1 \right], & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (2)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — пороговые величины. Как показали проведённые исследования, меньшую (на 5–7 %) ошибку при фильтрации контрастных изображений имеет пороговая функция (2), которая и будет использоваться в дальнейшем, а отфильтрованное значение коэффициента разложения (оценка для точного, но неизвестного коэффициента разложения  $d_{n,m}$ ) определяется как

$$\hat{d}_{n,m} = T_{HEB}(\tilde{d}_{n,m}, \lambda_1, \lambda_2).$$

Перейдём к рассмотрению артефактов, появляющихся при вейвлет-фильтрации контрастных изображений. В качестве тестового изображения примем изображение TARGET, показанное на рис. 1, *a* размерами  $256 \times 256$  пикселей. Искадим точные значения изображения нормальным распределённым шумом с относительным уровнем 15 %. Полученное таким образом зашумлённое изображение  $\tilde{F}(j_1, j_2)$  приведено на рис. 1, *b*. Изображение  $\tilde{F}(j_1, j_2)$  подвергалось вейвлет-фильтрации с пороговой функцией (2) при оптимальных значениях пороговых величин  $\lambda_{1opt}, \lambda_{2opt}$  (в вычислительном эксперименте, когда известно точное изображение, эти значения можно определить). Заметим, что при обработке изображений на практике эффективные оценки для  $\lambda_{1opt}, \lambda_{2opt}$  можно получить, используя подход, приведённый в [7].

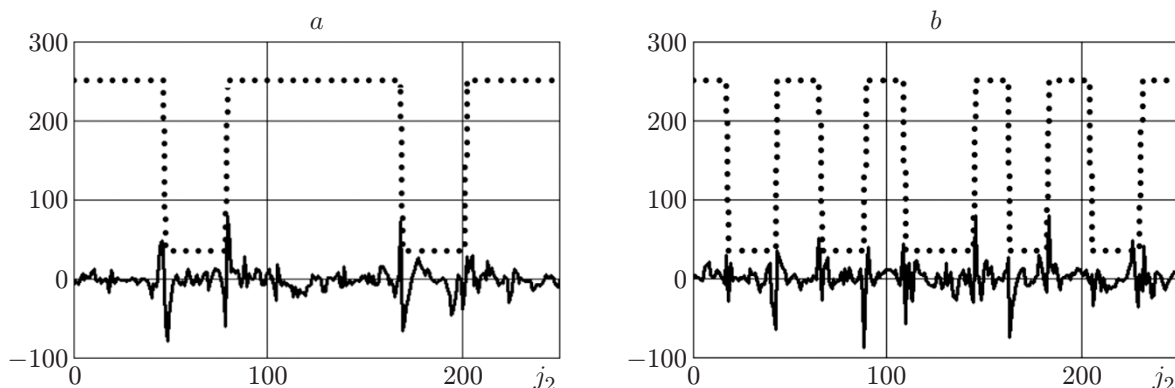


Рис. 2. Ошибки вейвлет-фильтрации зашумлённого тестового изображения:

$a$  — при  $j_1 = 55$ ,  $b$  — при  $j_1 = 128$

Для большей наглядности результатов выполненной вейвлет-фильтрации далее приводятся сечения изображений, образованные плоскостями с координатами  $j_1 = 55$  (на рис. 1,  $a$  это сечение обозначено прямой 1) и  $j_1 = 128$  (обозначено прямой 2 на рис. 1,  $a$ ). На рис. 2,  $a$  и  $b$  показаны сечения  $F(55, j_2)$ ,  $F(128, j_2)$  точного изображения (точечные кривые). На этих же рисунках показаны сечения (сплошная кривая) изображения  $E(j_1, j_2) = F(j_1, j_2) - \hat{F}(j_1, j_2)$ , которые можно интерпретировать как ошибку вейвлет-фильтрации. Изображение  $\hat{F}(j_1, j_2)$  является результатом вейвлет-фильтрации зашумлённого изображения  $\tilde{F}(j_1, j_2)$ .

Видно, что ошибки фильтрации присутствуют во всех пикселях изображения, но в области резкого изменения амплитуды изображения уровень этих ошибок немного выше. Заметим, что при увеличении пороговых значений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  по сравнению с  $\lambda_{1opt}$ ,  $\lambda_{2opt}$  происходит уменьшение уровня случайной составляющей ошибки фильтрации, но значительно сглаживаются угловые точки, что вызывает увеличение общей ошибки фильтрации. Поэтому возникает проблема устранения остаточного шума (артефактов) в результатах вейвлет-фильтрации.

В ряде публикаций (например, [8, 9]) предложен метод устранения артефактов, основанный на усреднении результатов вейвлет-фильтрации «сдвинутых» изображений, полученных циклическим сдвигом исходного зашумлённого сигнала. Поясним идею этого метода на примере вейвлет-фильтрации одномерного сигнала, заданного своими зашумлёнными значениями  $\{\tilde{f}(j)\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Введём следующие обозначения:  $\Phi_\lambda(\{\tilde{f}\})$  — оператор пороговой вейвлет-фильтрации значений  $\{\tilde{f}(j)\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ ;  $\text{Sh}_k$  — оператор циклического сдвига влево на  $k$  отсчётов исходного сигнала;  $\text{Sh}_{-k}$  — оператор циклического сдвига вправо на  $k$  отсчётов. Тогда результат вейвлет-фильтрации такого сдвинутого сигнала можно отобразить следующим операторным выражением:

$$\hat{f}^{[k]} = \text{Sh}_{-k}(\Phi_\lambda(\text{Sh}_k(\{\tilde{f}\}))). \quad (3)$$

Окончательный результат фильтрации определяется усреднением всех векторов  $\hat{f}^{[k]}$ , т. е.

$$\bar{\hat{f}} = \frac{1}{M} \sum_{k \in K_M} \hat{f}^{[k]}, \quad (4)$$

где  $K_M$  — множество из  $M$  значений сдвигов. Эту методику можно обобщить и на алгоритмы вейвлет-фильтрации изображений (но это требует существенного увеличения вычислительных затрат). Автором был выполнен вычислительный эксперимент с изображением

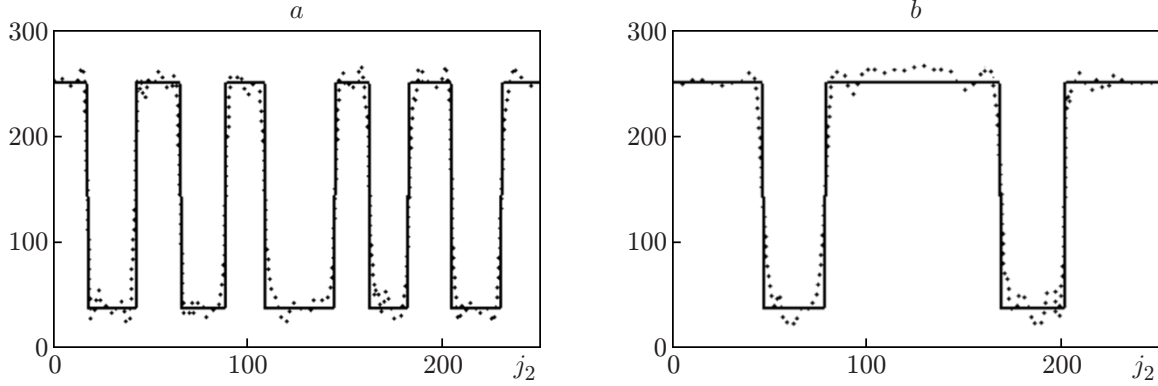


Рис. 3. Результаты обработки зашумлённого изображения алгоритмом (3), (4):  
 $a$  — результат фильтрации при  $j_1 = 128$ ,  $b$  — при  $j_1 = 55$

TARGET, показавший, что даже при значительном числе сдвигов ( $M = 30$ ) уменьшение амплитуды артефактов было незначительным, но при этом проявляется тенденция к увеличению систематической ошибки фильтрации (сглаживание в угловых точках). Эти результаты хорошо иллюстрируются рис. 3 и значениями относительной ошибки фильтрации алгоритмом (3), (4) в табл. 1.

Видно, что описанный подход к уменьшению артефактов не является эффективным, т. к. остаточный уровень артефактов остаётся достаточно высоким и к тому же требует значительных вычислительных затрат. Поэтому перейдём к изложению другого подхода по устранению артефактов, использующего для этого нелинейные локальные пространственные фильтры.

**Устранение артефактов локально-пространственными фильтрами.** В работе [10] было выполнено сравнение ошибок фильтрации шумов различной статистической природы алгоритмами вейвлет-фильтрации и локально-пространственными фильтрами. Установлено, что фильтрация импульсного шума осуществляется существенно лучше локально-пространственными фильтрами. Поэтому для устранения артефактов попробуем применить так называемый комбинированный фильтр (КФ) [11]. При фильтрации одномерного зашумлённого сигнала  $\{\tilde{f}(j)\}$  выходной сигнал КФ имеет вид

$$\hat{f}_j^{\text{КФ}} = \text{aver}_K(\hat{f}_i^{\text{МФ}} : j - K \leq i \leq j + K, |\hat{f}_i^{\text{МФ}} - \hat{f}_j^{\text{МФ}}| \leq \Delta_f), \quad (5)$$

где  $\hat{f}_i^{\text{МФ}}$  — результат фильтрации медианным фильтром (МФ), определяемый выражением

$$\hat{f}_j^{\text{МФ}} = \text{med}_L(\tilde{f}_{j-L}, \tilde{f}_{j-L+1}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+L}), \quad (6)$$

где  $\text{med}_L$  — функция, вычисляющая медиану из  $2L+1$  зашумлённых значений, попавших в апертуру фильтра (указаны в скобках). Заметим, что МФ хорошо фильтрует импульсные шумы и сохраняет контрастные составляющие в отфильтрованном сигнале. Усреднение в КФ (сглаживание оставшихся шумов) происходит только для значений  $\hat{f}_i^{\text{МФ}}$  из интервала  $[\hat{f}_i^{\text{МФ}} - \Delta_\varphi, \hat{f}_i^{\text{МФ}} + \Delta_\varphi]$ , что предотвращает сглаживание контрастных составляющих точного сигнала. Таким образом, КФ устраняет импульсные шумы и успешно сглаживает однородные остаточные шумы, при этом размеры апертур удовлетворяют неравенству  $K \geq L$ . Если величина  $K = 0$ , то КФ превращается в МФ. Если величина  $L = 0$ , то КФ превращается в интервальный фильтр скользящего среднего.

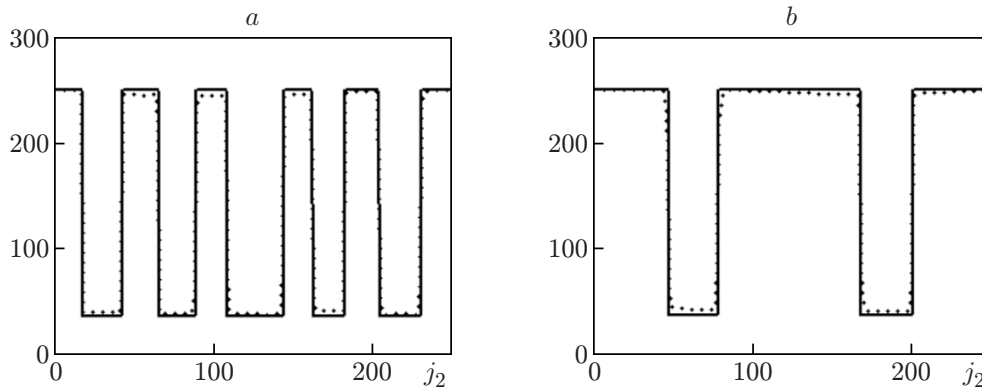


Рис. 4. Результаты локально-пространственной фильтрации: *a* — результат фильтрации при  $j_1 = 128$ , *b* — при  $j_1 = 55$

Обобщим изложенный одномерный КФ для фильтрации зашумлённых изображений  $\tilde{F}_{i1,i2} = F_{i1,i2} + \eta_{i1,i2}$ ,  $i1 = 1, \dots, N_1$ ,  $i2 = 1, \dots, N_2$ , где  $F_{i1,i2}$  — значения точного изображения,  $\eta_{i1,i2}$  — погрешности (шум) регистрации. В этом случае фильтр (5) можно представить в виде

$$\hat{F}_{j1,j2}^{\text{КФ}} = \text{aver}_{i1,i2 \in A} (\hat{F}_{i1,i2}^{\text{МФ}} : |\hat{F}_{i1,i2}^{\text{МФ}} - \hat{F}_{j1,j2}^{\text{МФ}}| \leq \Delta_F), \quad (7)$$

где результат медианной фильтрации  $\hat{F}_{j1,j2}^{\text{МФ}}$  определяется выражением

$$\hat{F}_{j1,j2}^{\text{МФ}} = \text{med}_{i1,i2 \in B} (\tilde{F}_{i1,i2}). \quad (8)$$

Таким образом, усредняются только те значения медианного фильтра  $\hat{F}_{i1,i2}^{\text{МФ}}$ , которые попали в плоскую апертуру  $A$ -фильтра, чаще всего в прямоугольную апертуру размера  $K_1 \times K_2$ , и удовлетворяют ещё дополнительному условию  $|\hat{F}_{i1,i2}^{\text{МФ}} - \hat{F}_{j1,j2}^{\text{МФ}}| \leq \Delta_F$ , что предотвращает сглаживание контрастных деталей изображения при правильном выборе порога  $\Delta_F$ . Заметим, что оптимальные параметры КФ (минимизирующие ошибку фильтрации) можно оценить, используя алгоритмы [12].

Вернёмся к изображению, являющемуся результатом вейвлет-фильтрации (см. рис. 2), и для удаления артефактов используем алгоритм (7), (8). На рис. 4 показаны результаты локально-пространственной фильтрации с параметрами: апертура  $A$  —  $5 \times 5$ ; апертура  $B$  —  $25 \times 25$ ; параметр  $\Delta_F = 30$ .

Видно, что предлагаемый подход позволяет почти полностью удалить артефакты вейвлет-фильтрации.

**Результаты численных исследований.** Перейдём к исследованию эффективности предлагаемого подхода при разных уровнях шума регистрации изображения TARGET. В качестве вейвлетов использовались ортогональные вейвлеты Добеши8. Точные значения изображений искажались нормально распределённым шумом измерений с нулевым средним с относительным уровнем шума  $\delta_\eta = \|\tilde{F} - F\|/\|F\|$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма матрицы. Относительная ошибка фильтрации определялась выражением  $\delta_{\hat{F}} = \|\hat{F} - F\|/\|F\|$ , где  $\hat{F}$  — обработанное тем или иным алгоритмом изображение. Апертура  $A$  задавалась размерами  $5 \times 5$ , апертура  $B$  —  $25 \times 25$ . Параметр  $\Delta_F$  зависел от уровня шума регистрации и определялся алгоритмом [12].

В табл. 1 приведены значения относительных ошибок фильтрации при разных уровнях шума регистрации изображения и разных алгоритмах обработки.

Таблица 1

| $\delta_\eta$ | $\delta_{\hat{F}}$     |                                 |                                     |
|---------------|------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
|               | Вейвлет-<br>фильтрация | Алгоритм<br>фильтрации (3), (4) | Алгоритм постфильтрации<br>(7), (8) |
| 0,025         | 0,016                  | 0,015                           | 0,013                               |
| 0,050         | 0,031                  | 0,029                           | 0,026                               |
| 0,075         | 0,042                  | 0,039                           | 0,031                               |
| 0,100         | 0,058                  | 0,055                           | 0,041                               |
| 0,150         | 0,075                  | 0,072                           | 0,055                               |

**Заключение.** Анализируя относительные ошибки фильтрации, приведённые в табл. 1, и графики результатов фильтрации, можно сделать следующие выводы:

— предложенный подход позволяет достаточно эффективно устранить артефакты вейвлет-фильтрации, не привлекая при этом априорную информацию о фильтруемом изображении;

— с увеличением относительного уровня шума регистрации возрастает выигрыш по точности фильтрации от применения постобработки результатов вейвлет-фильтрации локально-пространственными фильтрами;

— метод устранения артефактов, основанный на усреднении результатов вейвлет-фильтрации «сдвинутых» изображений, полученных циклическим сдвигом исходного зашумлённого изображения, незначительно уменьшает общую ошибку фильтрации и по точности проигрывает предлагаемому алгоритму постобработки результатов вейвлет-фильтрации локально-пространственными фильтрами.

Учитывая вышерассмотренное, можно дать рекомендацию о целесообразности использования предлагаемого подхода для устранения артефактов вейвлет-фильтрации контрастных изображений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MatLAB. М.: ДМК, 2005. 304 с.
2. Воскобойников Ю. Е. Вейвлет-фильтрация сигналов и изображений (с примерами в MathCAD). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2015. 188 с.
3. Воскобойников Ю. Е. Алгоритмы вейвлет-фильтрации с примерами в пакете MathCAD. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. 196 с.
4. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(R)$  // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.
5. Воскобойников Ю. Е., Крысов Д. А. Выбор наилучшей однопараметрической пороговой функции в алгоритмах вейвлет-фильтрации // Сб. науч. тр. НГТУ. 2016. № 3(85). С. 71–82.
6. Воскобойников Ю. Е., Крысов Д. А. Выбор наилучшей двухпараметрической пороговой функции в алгоритмах вейвлет-фильтрации // Автоматика и программная инженерия. 2016. № 3(17). С. 91–98.
7. Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В. Построение алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями // Автометрия. 2012. **48**, № 1. С. 17–29.
8. Fletcher A. K., Ramchandran K., Goyal V. K. Wavelet denoising by recursive cycle spinning // Proc. of the IEEE Intern. Conf. Image Proc. Rochester, NY, Sept. 2002. P. 873–876.
9. Khelalef A., Himeur Y., Brahimi T. Improved wavelet image denoising technique by cycle spinning and threshold selection // African Journ. Engineering Research. 2014. **2**, N 2. P. 21–25.

10. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Сравнение двух классов алгоритмов фильтрации изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 1. Р. 17–29.
11. **Бронников А. В.** Нелинейные комбинированные алгоритмы фильтрации зашумленных сигналов и изображения // Автометрия. 1990. № 1. С. 21–28.
12. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимальных параметров пространственно-локальных фильтров // Автометрия. 2019. **55**, № 3. С. 13–20. DOI: 10.15372/AUT20190302.

*Поступила в редакцию 20.12.2019*

*После доработки 02.04.2020*

*Принята к публикации 22.04.2020*

---